3) a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n} - u_{2n+1}$. Montrer que $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$ et déduire que $v_n \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites adjacentes et déterminer leurs limite l. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

EXERCICE N°4 : 30' 6 points

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2 u_n}{1 + u_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n < 1$.

b) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

2) a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1 - u_n}{1 + u_n^2} \leq \frac{1}{1 + u_0^2}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(1 - u_n)$ et que $1 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{5}{n} \leq S_n \leq 1$.

Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1 - u_n}{1 + u_n}$. Montrer que $v_{n+1} = (v_n)^2$. En déduire que $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$.

5) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = v_0 . v_1 . \ldots . v_n$ et $w_n = \frac{P_n}{v_{n+1}}$.

Calculer P_n en fonction de n puis montrer que w est une suite constante que l'on déterminera.